物理学 2003 年度 補習

1 三角関数

1.1 ラジアン単位

ラジアン単位は，円弧の長さを基準にした角度のあらわし方（弧度法とも言う）。

- 半径 1 の円（単位円）を考える。
- その円の円周は 2π 。
- 中心角度（今までの角度の単位では，360°）を 2π (rad) と定義する。
- 例えば，角度 120° をラジアン単位であらわすと，半径 1 ，中心角度 120° の扇形の弧の長さになるので，$\frac{2}{3}\pi$ (rad)。

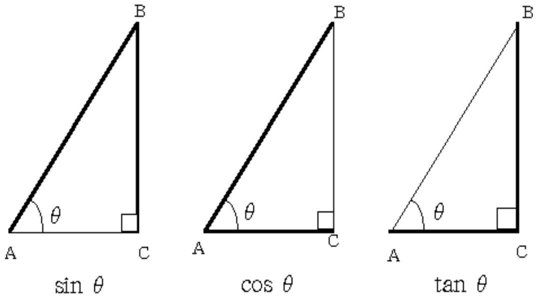
ラジアン単位を使う利点。
半径 r，中心角度 θ の円弧の長さ l を計算する場合, θ がラジアン単位であれば，$l = r\theta$ となる。
例えば，円運動を考える場合，ある時間 Δt の間に $\Delta\theta$ 回転したとすると，半径を r とすれば移動距離は $r\Delta\theta$ と簡単な形で表わすことができる。

物理，数学では，特に断らない限り角度の単位はラジアン。

1.2 三角関数の定義

三角関数を高等学校で学んだ者はこの節を飛ばしてもよい。

右の図のような直角三角形 ABC で、$\angle BAC$ を θ とする。
このとき、



正弦 $sin\theta = \frac{BC}{AB}$
余弦 $cos\theta = \frac{AC}{AB}$
正接 $tan\theta = \frac{BC}{AC}$

と定義する。

問題1

θの値を 0〜2π [rad] まで $\frac{\pi}{10}$[rad] づつ変化させ、sin θ,cos θ, tan θ, を電卓で計算し、グラフにプロットせよ。

定義より、

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} \tag{1}$$

である。また、$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \theta$ なので

$$cos\theta = sin(\frac{\pi}{2} - \theta) \tag{2}$$

が成り立つ。更に三平方の定理 $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$ から

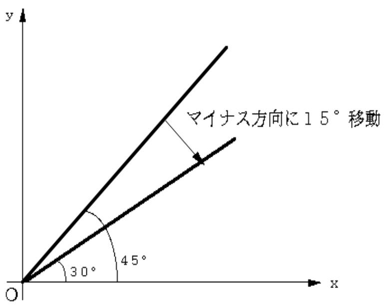
$$(\frac{AC}{AB})^2 + (\frac{BC}{AB})^2 = 1 \tag{3}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{4}$$

が成り立つ。

1.3 座標平面上の三角関数

1.3.1 角度の拡張



実数に正負があるように、角度も負の領域まで拡張することが出来る。xy 平面上の x 軸に重なる角度を 0 °とする。x 軸とのなす角がそれぞれ 30 °,45 °となる線分を引いてみる。30 °というのは 45 °からマイナス 15 °移動した角度である。これから分かるように、xy 平面を上から見て反時計回りを正の向き、時計回りを負の向きと定義する。

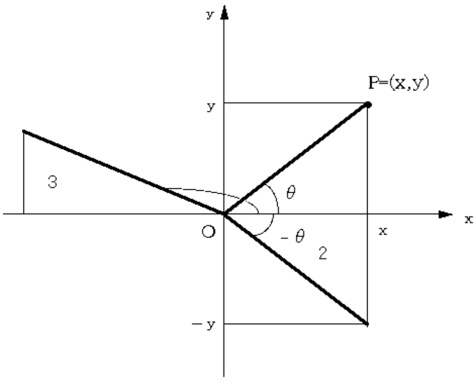
1.3.2 負の角度と三角関数

三角関数の定義にこれまでは直角三角形を使ったが、これからは平面座標上で三角関数を考える。xy 平面上のあるを点P、座標を（x, y）とする。原点から点Pまでの長さ r は $\sqrt{x^2 + y^2}$ である。線分 OP と x軸との角度

をθとする。三角関数の定義より

$$sin\ \theta = \frac{y}{r} \tag{5}$$
$$cos\ \theta = \frac{x}{r} \tag{6}$$
$$tan\ \theta = \frac{y}{x} \tag{7}$$

ここで、y だけが負の数であるとき、角度θは負の符号となるので、



$$\sin(-\theta) = -\frac{y}{r} = -\sin\theta \tag{8}$$
$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta \tag{9}$$
$$\tan(-\theta) = -\frac{y}{x} = -\tan\theta \tag{10}$$

となる。
また、x だけが負の数であるとき、すなわち θ が 90 °を超えるとき、三角関数の値は図中の 3 の直角三角形を使って決められる。
このとき、θ の値は正であることに注意しよう。
関数 $f(-x) = f(x)$ となるとき、関数 $f(x)$ を偶関数といい、$f(-x) = -f(x)$ となるとき、関数 $f(x)$ を奇関数という。式 (8),(9) から $sinx$ は奇関数、$cosx$ は偶関数であることがわかる。

1.4　加法定理と各種公式

加法定理

$$\sin(A \pm B) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{11}$$
$$\cos(A \pm B) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{12}$$

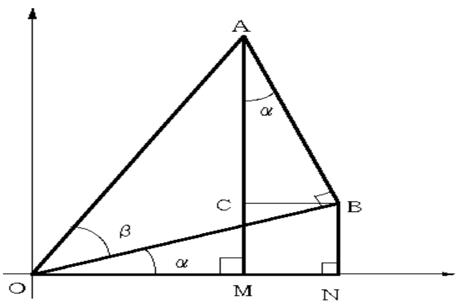
（複合同順）

証明

下図の $\triangle OBN$ と $\triangle OAB$ は、それぞれ、頂点 N、頂点 B が 90 °となる直角三角形である。

また、$\angle BON = \alpha, \angle AOB = \beta$ とする。頂点 B から辺 AM に垂線 BC を引く。

定義により



$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{AM}{OA} &(13)\\ &= \frac{CM}{OA} + \frac{AC}{OA} &(14)\\ &= \frac{BN}{OA} + \frac{AC}{OA} &(15)\\ &= \frac{BN}{OB}\frac{OB}{OA} + \frac{AC}{AB}\frac{AB}{OA} &(16)\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta &(17)\end{aligned}$$

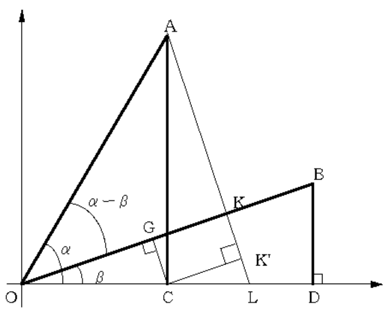
また、$sin(\alpha - \beta)$ については、

$sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha + (-\beta))$ なので、式 (8),(9), (11) を用いて、

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) &(18)\\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) &(19)\\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta &(20)\end{aligned}$$

証明終わり

$sin(\alpha - \beta) = sin\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sin\ \beta$ の図形を使った証明



直角三角形 OAC と直角三角形 OBD を考える。$\angle AOC = \alpha$、$\angle BOD = \beta$ とすると、$\angle AOB = \alpha - \beta$ となる。

頂点 A から辺 OB に垂直に交わる線分を引く。辺 OB との交点を K、辺 OD との交点を L とする。頂点 C から辺 AL に垂線 CK' を、辺 OB に垂線 CG を引くと、$sin(\alpha - \beta)$ は次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \frac{AK}{OA} & (21)\\
&= \frac{AK'}{OA} - \frac{KK'}{OA} & (22)\\
&= \frac{AK'}{OA} - \frac{CG}{OA} & (23)\\
&= \frac{AC}{OA}\frac{AK'}{AC} - \frac{OC}{OA}\frac{CG}{OC} & (24)\\
&= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & (25)
\end{aligned}
$$

問題2

同様に $cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ が成り立つことを証明せよ。

問題3

加法定理を使って、式（2）を確かめよ。

問題4

問題1により $\sin\ \theta$ は 2π の周期、すなわち $\sin\ \theta = \sin(\theta + 2\pi)$ であることが判った。これを加法定理を使って確かめよ。

倍角の公式

加法定理で，B を A とおき，プラスのみを考えると，

$$
\begin{aligned}
\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A & (26)\\
\sin 2A &= 2 \sin A \cos A & (27)
\end{aligned}
$$

和積の公式

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \tag{28}$$

ここで，$A+B=\alpha$**，**$A-B=\beta$ **とおくと，**$A=\frac{\alpha+\beta}{2}$**，**$B=\frac{\alpha-\beta}{2}$ **と表わせる。この関係を用いて上式を書き直すと,**

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{29}$$

となる。他の組み合わせも同様にして求めることが出来る。

1.5 基本的な三角関数の公式

以下に基本的な三角関数の公式を挙げておく。

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)) \\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)) \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ \\ \cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta) \\ \\ \tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \end{cases} \tag{32}$$

超難問題5

次の2つの等式を使って式 (??) を確かめよ[1]**。**

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos(m-1)\theta=\sin(m-\frac{1}{2})\theta-\sin(m-\frac{3}{2})\theta \tag{33}$$

[1] 基礎物理実験 P81、光の回折と干渉。式 (6-3)

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin(m-1)\theta = -\cos(m-\frac{1}{2})\theta + \cos(m-\frac{3}{2})\theta \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N} &= \sin\{\omega t-(m-1)\delta\} \\ &= \frac{\sin\frac{N}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} \end{aligned}\tag{35}$$

1.6 逆三角関数

関数 $y=f(x)$ に対して，$x=f^{-1}(y)$ を与える f^{-1} を，f の逆関数と言う。
三角関数についても逆関数が存在し，
sin に対して $\sin^{-1}$（アークサイン），
cos に対して $\cos^{-1}$（アークコサイン），
tan に対して $\tan^{-1}$（アークタンジェント）である。

1.7 位置，力，速度等の成分表示

下の図のような，斜面に置かれた物体を考える。

物体には，鉛直下向きに重力（mg）が作用している。
斜面に沿った方向への力の成分は，三角関数を用いて，$mg\sin\theta$ と表わせる。
同様に，斜面を垂直に押す力の成分は，$mg\cos\theta$ と表わせる。
下の図のような半径 R の球面上の点を考える。

この点の (x, y, z) 座標は，

$$\begin{aligned} x &= R\sin\phi\cos\theta \\ y &= R\sin\phi\sin\theta \end{aligned}$$

$$z = R\cos\phi$$

と表わせる。

2 ベクトル

2.1 ベクトルの定義と性質

点 A から点 B に達する有向線分（ A から B へ向かう矢印）を空間のベクトルといい，記号 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表わす。A，B の座標がそれぞれ (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) であれば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ と表わされる。つまり，ベクトルは A，B の差で決まり，その位置には無関係である。したがって，始点はどこにとっても良く，平行移動しても良い。通常は，$x_2 - x_1 = x$ 等として，単に (x, y, z) と表わす。

ベクトル $\vec{a} = (x, y, z)$ の大きさ，または長さは，$|\vec{a}|$ と表わす。これは，原点から点 (x, y, z) までの距離に相当するので，三平方の定理より，

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{36}$$

となる。

2.2 ベクトルの演算

2.2.1 和・差

2 つのベクトル $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$，$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ の和と差は，

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) && (37) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) && (38) \end{aligned}$$

と，各成分の和と差になる。

2 つのベクトルが等しいということは，$\vec{a} = \vec{b}$ と表し，$x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$ である。

$\vec{a} = \vec{b}$ であれば，

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= (0, 0, 0) && (39) \\ &\equiv \vec{0} && (40) \end{aligned}$$

であり，$\vec{0}$ を零ベクトルと呼ぶ。

$\vec{a}$ に対してベクトル $-\vec{a}$ は，大きさが等しく向きが逆のベクトルである。これを特に逆ベクトルと呼ぶ。

2.2.2 スカラー倍

任意のベクトル $\vec{a} = (x, y, z)$ と任意の実数 m について，

$$m\vec{a} = (mx, my, mz) \tag{41}$$

が成り立つ。

ここで，

1. $m > 0$ の場合
   $m\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで，大きさは m 倍
2. $m < 0$ の場合
   $m\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対向きで，大きさは $|m|$ 倍
3. $m = 0$ の場合
   零ベクトル

任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ と任意の数 m, n について，次の演算法則が成り立つ。

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a} \tag{42}$$

$$(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a} \tag{43}$$

$$m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b} \tag{44}$$

2.3 基本ベクトル

x 軸，y 軸，z 軸に平行で，大きさが 1 のベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ を基本ベクトルという。つまり，

$$\vec{i} = (1,0,0) \tag{45}$$

$$\vec{j} = (0,1,0) \tag{46}$$

$$\vec{k} = (0,0,1) \tag{47}$$

である。

これを使うと，

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x,y,z) \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{aligned} \tag{48}$$

と表すことができる。

2.4 内積

2.4.1 定義

ベクトルの内積（スカラー積）は，共に零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，そのベクトルのなす角が $\theta(0 \cdot \ \theta \cdot \ \pi)$ であるとき，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{49}$$

と定義される。

2.4.2 性質

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を任意のベクトル，m を任意の数とするとき，次の式が成り立つ。

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
   $(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$
5. $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a} \perp \vec{b}$ であれば，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2.4.3 成分表示

ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ を基本ベクトルを用いて表すと，

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \\ \vec{b} &= x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k} \end{aligned}$$

である。これを用いて内積を計算すると，

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \cdot (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) \\ &= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \end{aligned} \tag{50}$$

となる。

これを用いると，次の関係が得られる。

1. $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で，そのなす角を θ とすれば，

$$\cos\theta = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}} \tag{51}$$

2. $\vec{a} \perp \vec{b}$ であれば，$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$

2.5 外積

2.5.1 定義

ベクトルの外積（ベクトル積）は，共に零ベクトルでないベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，そのベクトルのなす角が $\theta(0 \cdot\ \ \theta \cdot\ \ \pi)$ であるとき，

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{52}$$

と表わし，

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |\vec{a} \times \vec{b}| \\ &= |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \end{aligned} \tag{53}$$

の大きさを持ち，$\vec{a}$ を π (rad) 以内回転して $\vec{b}$ に重ねるとき，右ネジの軸が進む向きを持ったベクトルと定義される（図参照)。

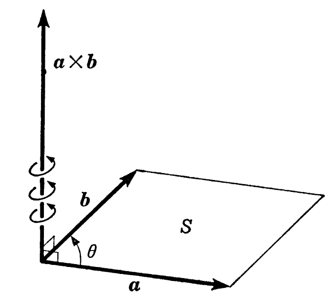


図 1: 外積の定義

この定義から次のことがわかる。

- 外積 $\vec{c}$ の大きさは，ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積である。
- $\vec{c}$ は，2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ 両方に対して垂直である。

2.5.2 性質

外積の定義から，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を任意のベクトル，m を任意の数とするとき，次の式が成り立つ。

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
   $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$

4. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
5. $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ であれば，$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

特に，1 にあるように，外積では掛ける順序に注意しなければならない。

2.5.3 成分表示

基本ベクトル $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は互いに垂直な単位ベクトルであるので，次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} && (54)\\
\vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} && (55)\\
\vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} && (56)
\end{aligned}$$

ベクトル $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ を基本ベクトルを用いて表すと，

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}\\
\vec{b} &= x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}
\end{aligned}$$

である。これを用いて外積を計算すると，

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \times (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k})\\
&= (y_a z_b - z_a y_b)\vec{i} + (z_a x_b - x_a z_b)\vec{j} + (x_a y_b - y_a x_b)\vec{k} && (57)
\end{aligned}$$

となる。または，行列を使って

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} \qquad (58)$$

と表わすことができる。

2.5.4 いくつかの例

外積で表わされる物理現象の例

- ローレンツ力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
- 力のモーメント $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$
- 角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

2.6 ベクトルと空間図形

2.6.1 直線

点 A（位置ベクトル $\vec{a}$）を通り，ベクトル $\vec{b}$ に平行な直線は，次のように表わされる。

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b} \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{59}$$

2.6.2 平面

点 A（位置ベクトル $\vec{a}$）を通り，ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面は，次のように表わされる。

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0 \tag{60}$$

2.6.3 球，楕円球

点 A（位置ベクトル $\vec{a}$）を中心とした半径 R の球は，次のように表わされる。

$$|\vec{r} - \vec{a}| = R \tag{61}$$

また，楕円球は，$\vec{a}, \vec{b}$ を 2 つの焦点の位置ベクトル，c を定数として

$$|\vec{r} - \vec{a}| + |\vec{r} - \vec{b}| = c \tag{62}$$

と表わされる。

2.6.4 平行六面体の体積

ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ でつくられる平行六面体の体積 V は，

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| \tag{63}$$

となる。

3　関数のグラフ

3.1　グラフの書き方

関数 $y = f(x)$ が与えられたとき，横軸に x，縦軸にその x の値に対応する $f(x)$ の値をプロットしていくと，$y = f(x)$ のグラフができる．

3.2　グラフを書くときに特に注意する点

- 極大，極少となる点を求め（微分の項を参照），その点の座標を書く．
- $x = 0, \pm\infty$ での $f(x)$ の値を求め，グラフを書く．
- グラフと x 軸，y 軸との交点の値を書く．

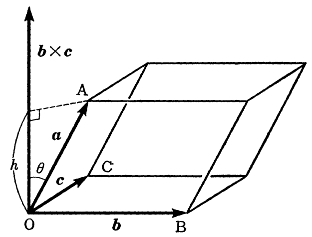


図 2: 3 つのベクトルでつくられる平行六面体

4 微分

4.0 関数の極限

4.0.1 極限の定義

微分に入る前に、関数の極限について復習をしておく。関数の極限操作は、次節で取り扱う微分で重要な役目を果たす事になる。

関数 $f(x)$ の変数 x を、一定の値 x_0 に限りなく近づけていく。それに伴い関数 $f(x)$ の値が一定な値 y_0 に限りなく近づいていくとき、関数 $f(x)$ には極限が存在する。
このとき y_0 を関数 $f(x)$ の ($x = x_0$ における) 極限値 という。
または関数 $f(x)$ は y_0 に 収束する という。
そしてこの事を以下の式で表す。

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \tag{64}$$

ただし関数の極限値は、常に存在するとは限らない 事に注意しよう。また、x を x_0 に近づけていくのであって、代入するのではないことも併せて注意しよう。

4.0.2 有理関数の極限

関数の極限を実際に計算してみよう。
例題
次の極限を求めよ

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{1 - x} \tag{65}$$

解答
例題の関数は $x = 1$ での値が決まらない (定義域に属していない)。しかし $x \neq 1$ であれば通分することができるので、

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{1 - x} &= \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} \\ &= \lim_{x \to 1} (1 + x) \\ &= 2 \end{aligned}$$

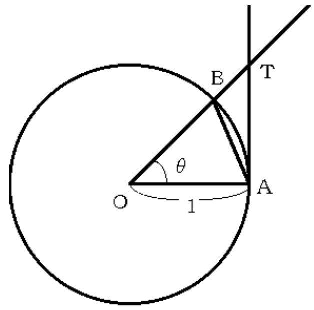
4.0.3 三角関数、指数関数

次節以降で必要になる極限値を求めておこう。
例題
次の極限値を計算せよ。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \tag{66}$$

解答

はじめに、準備事項を述べる。
半径 1 の円 O について、
図のような作図をする。
直線 AT は、点 A における接線である。
$0 < \theta < \pi/2$ のとき、



$\triangle OAB$、扇形 OAB、$\triangle OAT$、
それぞれの面積の大小関係は、

$$\triangle OAB < \text{扇形}\, OAB < \triangle OAT$$

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}\tan\theta$$

である。それぞれを $\frac{1}{2}\sin\theta$ で割れば、

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

各辺を逆数をとって (それぞれの項は正の数であることに注意)

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

$\theta \to 0$ で,$\cos\theta \to 1$ あるので、

$$1 \geqq \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \geqq \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

従って、

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

例題

次の極限は存在する。

$$\lim_{\Delta x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

証明は煩雑になるため、ここでは省略する。ここで、$h = \frac{1}{x}$ とおけば、

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{x}} = e$$

が成り立つ。
この e は自然対数の底と呼ばれ、π と並び代表的な無理数で、次のように近似される。

$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535$

4.1 定義と意味

微分は，関数の変化の割合，つまりグラフの傾きを求めるための手続きである。関数 $y = f(x)$ が与えられたとする。x が $x = a$ から $x = a + \Delta x$ まで変化したときの y の増分が Δy であったとすれば，関数 $y = f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{67}$$

と表わされる。

通常，Δx の値に応じて平均変化率も変ってくる。Δx が限りなく 0 に近づくとき，平均変化率の極限

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{68}$$

が有限に確定すれば，この極限値を関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数または変化率といい，記号 $f'(a)$ と表わす。

関数 $y = f(x)$ がある区間で微分可能（上の極限が有限に確定する）であるとき，その区間の各 x において微分係数 $f'(x)$ が存在し，ひとつの関数が得られる。この関数を $y = f(x)$ の導関数といい，

$$\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{df(x)}{dx}, \qquad y', \qquad f'(x)$$

などと表わす。

4.2 微分の基本公式

4.2.1 定数倍

関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，k を定数とすると，

$$\{kf(x)\}' = kf'(x) \tag{69}$$

が成り立つ。

4.2.2 和・差

2 つの関数について，

$$\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x) \tag{70}$$

が成り立つ。

4.2.3 合成関数

関数 $y = f(u), u = g(x)$ が合成関数 $y = f(g(x))$ をつくることができれば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{71}$$

が成り立つ。

例えば, $y = \sqrt{x^2+1}$ で, $y = \sqrt{u}$, $u = x^2 + 1$ と考えれば,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} &= \frac{d}{du}\sqrt{u}\frac{d}{dx}(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}2x \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned} \tag{72}$$

となる。

4.2.4 積・商

$y = f(x)g(x)$ であれば,

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{73}$$

が成り立つ。

$y = 1/f(x) = f(x)^{-1}$ は, 合成関数の考え方を用いて, $y = u^{-1}, u = f(x)$ と考えれば,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}u^{-1}\frac{d}{dx}f(x) \\ &= -u^{-2}f'(x) \\ &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \end{aligned} \tag{74}$$

となる。

以上を組み合わせれば, $y = f(x)/g(x) = f(x)g(x)^{-1}$ の導関数は

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)^{-1}\}' \\ &= f'(x)g(x)^{-1} + f(x)\{g(x)^{-1}\}' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned} \tag{75}$$

となる。

4.3 三角関数

三角関数の導関数を計算するため、4.0.3 章で求めた極限値を思いだそう。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \tag{76}$$

導関数の定義より、

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \tag{77}$$

右辺の分子を加法定理を用いて書き直す。

$$\begin{aligned}
\sin(x + \Delta x) &= \sin((x + \frac{\Delta x}{2}) + (\frac{\Delta x}{2})) \\
&= \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cos(\frac{\Delta x}{2}) + \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin(\frac{\Delta x}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin((x + \frac{\Delta x}{2}) - (\frac{\Delta x}{2})) \\
&= \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cos(\frac{\Delta x}{2}) - \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin(\frac{\Delta x}{2})
\end{aligned}$$

従って

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin(\frac{\Delta x}{2})$$

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}
\end{aligned}$$

式 (76) より、

$$(\sin x)' = \cos x$$

$\cos x, \tan x$ の導関数は、上の結果と式 (75) を使って、

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' \\
&= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

4.4 指数関数，対数関数

4.4.1 自然対数の底

a を正の実数としたとき，$y = a^x$ を指数関数と呼ぶ。この関数の逆関数は $y = \log_a x$ と表わされ，対数関数と呼ばれている。

いま，$a > 1$ として，$y = \log_a x$ の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めると，

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+h) - \log_a 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1+h)}{h} \\ &= \log_a\{\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\} \end{aligned} \tag{78}$$

となる。この極限値は，

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = 2.718281828\cdots \tag{79}$$
$$\equiv e \tag{80}$$

となり，記号 e で表わす。この e を自然対数の底と呼ぶ。e を底とする対数関数

$$\begin{aligned} y &= \log_e x \\ &\equiv \ln x \end{aligned} \tag{81}$$

を自然対数と呼ぶ。

4.4.2 対数関数の導関数

自然対数 $y = \ln x (x > 0)$ の導関数を求める。x の増分 Δx に対する y の増分 Δy は，

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \tag{82}$$

となる。ここで，$h = \Delta x / x$ とおけば，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{x}\ln(1+h)^{1/h} \tag{83}$$

となる。ここで，$\Delta x \to 0$ とすれば $h \to 0$ となるので，導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{1/h} = \frac{1}{x}\ln e \tag{84}$$

となり，$\ln e = 1$ であるから，結局，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{85}$$

となる。

さて，e 以外の底の対数関数 $y = \log_a x$ の導関数は，底の変換公式

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{86}$$

を用いて,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a} \tag{87}$$

となる。

4.4.3 指数関数の導関数

自然対数の底 e に対する指数関数 $y = e^x$ の導関数を考える。ちなみに，自然対数 $\ln$ はこの指数関数の逆関数であり,

$$y = e^x \iff x = \ln y \tag{88}$$

である。

指数関数の微分は,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}\\ &= e^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\\ &= e^x\end{aligned} \tag{89}$$

となり，e^x は微分しても形が変らない関数である。

通常の指数関数 $y = a^x$ の微分は，一旦両辺の対数をとって $\ln y = x\ln a$ として，e についての指数関数に変換すると,

$$y = e^{x\ln a} \tag{90}$$

となる。これを微分すると,

$$\begin{aligned} y' &= (\ln a)e^{x\ln a}\\ &= (\ln a)a^x\end{aligned} \tag{91}$$

となる。

4.5 基本的な関数の導関数

$f(x)$	$f'(x)$
c （定数）	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

4.6 微分の応用

4.6.1 接線・法線

接線

微分はグラフの傾き，つまり接線の傾きを求める手続きであった。関数 $y = f(x)$ の点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ における接線の傾きは，

$$f'(a) \tag{92}$$

である。

従って接線の方程式は，点 $\mathrm{P}(a, f(a))$ を通り傾き $f'(a)$ の直線であるから，

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \tag{93}$$

と表わされる。

法線

点 P を通り，接線に垂直な直線を法線という。その傾きを m とすれば，接線と直交する条件

$$f'(a)m = -1 \tag{94}$$

より，

$$y - f(a) = \frac{1}{f'(a)}(x - a) \tag{95}$$

となる。

4.6.2 高次導関数

2 次導関数

$y = f(x)$ の導関数 $y' = f'(x)$ がさらに微分可能であるとき，y' の導関数を y の 2 次導関数と呼び，

$$y'', \qquad f'', \qquad \frac{d^2y}{dx^2}\cdots$$

などと表わす。

n 次導関数

$y = f(x)$ が n 回微分可能であるとき，それを y の n 次導関数と呼び，

$$y^{(n)}, \qquad f^{(n)}, \qquad \frac{d^ny}{dx^n}\cdots$$

などと表わす。

4.6.3 極大・極小

関数の極大値，極小値をあわせて極値と呼ぶ。

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極値をとれば，

$$f'(a) = 0 \tag{96}$$

が成り立つ。

しかし，逆（ $f'(a) = 0$ ならば $x = a$ で極値をとる）は必ずしも成り立たない。例えば，$f(x) = x^3$ は $f'(0) = 0$ であるが，$x = 0$ では極値をとらない。

極値の判定

$y = f(x)$ について，$f'(a) = 0$ であり，x が増加しながら a を通過するとき，

$f'(x)$ が正から負になるとき $\Rightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(x)$ が負から正になるとき $\Rightarrow$ $f(a)$ は極小値

極値と 2 次導関数

2 次導関数は傾きの変化の割合に相当する。したがって，極大値では $f'(x)$ が正から負に変っているので，傾きの変化の割合（ 2 次導関数 ）は負である。反対に，極小値では $f'(x)$ が負から正に変っているので，傾きの変化の割合（ 2 次導関数 ）は正である。

以上をまとめると，

$f'(a) = 0$ で $f''(a) < 0$ $\Rightarrow$ $f(a)$ は極大値
$f'(a) = 0$ で $f''(a) > 0$ $\Rightarrow$ $f(a)$ は極小値

5　積分

5.1　積分の意味

積分は，(簡単に言えば) グラフの面積を求める手続きである。たとえば、複雑な形をした土地の面積を測量するとき、どうすれば精度よく測量できるか考えよう。すぐに思いつくのは、この土地を小さな区画に区分けして、各小区画の面積を測量し、それらを足し合わせて全体の面積を求める方法であろう。
積分とはまさにこの分けて積み重ねることを定式化したものである。

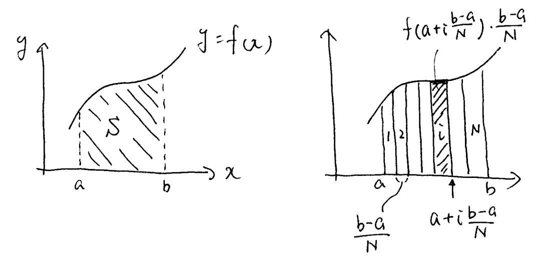
関数 $y = f(x)$ **が** $a \leq x \leq b$ **の範囲で正であるとして，** a **から** b **まで** x **軸と** $f(x)$ **に囲まれた部分の面積** S **を求める。** a **から** b **を** N **等分に分割し，** $y = f(x)$ **を図のように長方形のブロックで近似すると，面積は**

$$S = \sum_{i=1}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + i\frac{b-a}{N}\right) \tag{97}$$

と近似できる。
積分は分割幅を無限に小さくしたもの，つまり $N \to \infty$ **で定義され，**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= S \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{b-a}{N} f\left(a + i\frac{b-a}{N}\right) \end{aligned} \tag{98}$$

である。



しかし，このままでは良く分からないので，次のようなことを考える。
a **から** x **までの面積を** $S(x)$ **とする。** x **が** Δx **だけ増えたときの面積の増分** $\Delta S(x)$ **は，**

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) \tag{99}$$

となる。一方， $\Delta S(x)$ **は，ブロックの考え方を用いると**

$$\Delta S(x) = f(x + \Delta x)\Delta x \tag{100}$$

となる。ここで,

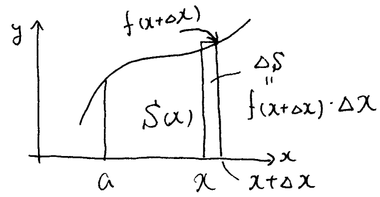
$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \tag{101}$$

として，$\Delta x \to 0$ とすると，これは微分となり,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \\ &= \frac{dS(x)}{dx} = S'(x) \\ &= f(x)\end{aligned} \tag{102}$$

となる。まとめると

$$\begin{aligned}\int_a^x f(x)dx &= S(x) \\ S'(x) &= f(x)\end{aligned} \tag{103}$$



つまり，a から x まで $f(x)$ を積分した $S(x)$ は，微分すると元の関数 $f(x)$ になるような関数である。

単に積分と言ったら２つの意味を持っていることになる。
１つは文字通り分けて積み重ねることであり、もうひとつは微分したら $f(x)$ となる関数 $F(x)$ を求めることである。[2]

前章でさまざまな関数の微分を学んだ。このことは微分して求められた関数の積分は既に解っていることになる。次節に基本的な関数の積分の例を挙げ、微分したら $f(x)$ となる関数 $F(x)$ を求める事、すなわち不定積分の性質について学ぶ。更に続く説で、積分のもう一つの意味である分けて積み重ねる積分 (定積分という) について考え、２つの積分の関りをについて考える。

[2]前者を定積分、後者を不定積分という。ここでは不定積分と定積分を明確にせずに説明している。これについては後の節で明らかにする。

5.2 基本的な関数の不定積分

今ある関数 $F(x)$ の導関数が他の関数 $f(x)$ に等しいとする。

$$F'(x) = f(x)$$

このとき $F(x)$ を不定積分または原始関数といい、次の式で表される。

$$F'(x) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、任意定数 C を積分定数[3]といい、$f(x)$ を被積分関数という。
以下の表に被積分関数と不定積分の関係をまとめてみた。

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$
1	$x + C$
$x^n \quad n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$\ln\lvert\sec x\rvert + C$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\sec^2$	$\tan x + C$
$cosec^2 x$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{a+x^2}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a}\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

これらのあるものは、微分の章で取り扱ったものであり、それ以外のものは次節以降で扱う不定積分の求め方を使って導かれたものである。

どのような関数であっても導関数を求めることは可能であるのに対し、不定積分を求めることが、どのような関数に対しても可能であるとは限らない。たとえば、確率論によく現れる $\exp(-x^2)$ といった関数の不定積分は、これまで見てきたような関数 (これを初等関数という) では表せない。

[3]積分定数は微分方程式を解いたときにも出てくる。初期条件が与えられた微分方程式を解くとき、その初期条件によって積分定数が決定される。詳細は 8 章微分方程式参照

5.3 積分の性質

積分には，次の性質がある。

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \tag{104}$$

$$\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \tag{105}$$

5.4 x のべき乗の不定積分

多項式によく出てくる、x^p の積分を考えてみる。§5.2 の表に x^n の不定積分が載っているが、x^n と書くと x の整数乗のような印象を与えてしまう。実はこの x の肩の上に乗っている数は実数であってもよい。
はじめに $y = x^p$ を微分してみる。両辺の対数を取って

$$\begin{aligned}
\ln y &= p\ln x \\
\frac{d}{dx}\ln y &= p\frac{1}{x} \\
\frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{dx} &= p\frac{1}{x} \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= p\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= p\frac{1}{x}y \\
y' &= px^{p-1}
\end{aligned}$$

となりこれは、px^{p-1} を積分すると x^p となる事を意味する。

$$\begin{aligned}
\int px^{p-1}dx &= x^p + C \\
or\,(p \to p+1) & \\
\int x^p dx &= \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C
\end{aligned}$$

ただし注意しなければならない事がある。上記の下のほうの式

$\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ 　　の p は $p \neq -1$ である。

$p = -1$ のとき、上記の積分は、

$$\begin{aligned}
\int x^{-1}dx &= \int \frac{1}{x}dx \\
&= \ln x + C
\end{aligned}$$

である。

例題
次の不定積分を計算せよ。

$$\int \sqrt{x}dx$$

解答

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}dx &= \int x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

5.5 定積分と不定積分

5.5.1 定積分の定義

区間 [a,b] 内で $f(x)$ と x 軸とで囲まれた領域の面積は、領域を分割し、各々の面積を足し合わせることによって求めることができる。これを定積分といい、次の式で表される。

$$\int_a^b f(x)dx$$

これは領域の面積を表すので、ひとつの決まった実数である。これからこの定積分を計算することを考えるのだが、その前にて定積分の性質を以下に示しておく。

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (106)$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (107)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (108)$$

5.5.2 微分積分法の基本公式

§5.1 の (7) 式の定積分を考える。

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &= S(x) \\ \frac{d}{dx}S(x) &= f(x)\end{aligned}$$

この定積分の上端 x を変数とすると、この定積分の値は x とともに変化する。また、定積分の積分変数 (ここでは t のこと) は、どんな文字を使ってもかまわないので上端と混同しないように t を使った。
上式の下の式は不定積分の定義より、$S(x)$ すなわち $\int_a^x f(t)dt$ が、$f(x)$ の不定積分の１つであること $(C = 0)$ を意味している。

それゆえ任意の１つの不定積分を $F(x)$ とすると、

$$F(x) = S(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

ところで $S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ なので

$$\begin{aligned} S(a) &= F(a) - C = 0 \\ C &= F(a) \end{aligned}$$

このことから $\int_a^b f(x)dx$(積分変数は x に直した) は、

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \tag{109}$$

のように、不定積分の $x = a, x = b$ の値を用いて表されることが示される。これが分けて積み重ねる意味の積分 (定積分) と、微分の逆操作としての積分 (不定積分) の間の関係を表す微分積分法の基本定理と呼ばれる関係式である。

例題 $f(x) = 3x + 1$ を区間 $[2, 4]$ で積分せよ

$$\begin{aligned} \int_2^4 (3x+1)dx &= \left[\frac{3}{2}x^2 + x\right]_2^4 \\ &= \frac{3}{2} \times 4^2 + 4 - \left(\frac{3}{2} \times 2^2 + 2\right) \\ &= 20 \end{aligned}$$

5.6 積分の技法

5.6.1 置換積分（不定積分）

不定積分を計算するとき積分変数を変更して積分する方法がある。この計算を置換積分法という。

関数 $\phi(t)$ が微分可能であり，$\frac{d\phi(t)}{dt} = \phi'(t)$ とする。$f(x)$ の積分を計算するとき，$x = \phi(t)$ とおくと，

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \tag{110}$$

とすることができ，積分変数を x から t に変更することができる。

例えば，$\int x\sqrt{x+1}dx$ を計算する場合，$x+1=t$ とおく。このとき，$dx=dt$ である。$x=t-1$ と $dx=dt$ を与えられた不定積分に代入すると，

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}dx &= \int (t-1)\sqrt{t}dt \\ &= \int (t^{3/2}-t^{1/2})dt \\ &= \frac{2}{5}t^{5/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}+c \\ &= \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+c\end{aligned}$$

となる。この式に $t=x+1$ を代入して元の変数 x に戻すと，

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+c$$

となる。

また，次のような三角関数の積分に対しても置換積分法が有効な場合がある。例えば，$\int \cos^4 x\sin^3 x dx$ の場合，$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x dx=dt$ となる。これを利用して次の積分を計算する。

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x\sin^3 x dx &= \int \cos^4 x\sin^2 x\sin x dx \\ &= \int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x dx\end{aligned}$$

ここで，$\cos x=t$，$\sin x dx=-dt$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x dx &= \int t^4(1-t^2)(-dt) \\ &= \int (t^6-t^4)dt \\ &= \frac{1}{7}t^7-\frac{1}{5}t^5+c \\ &= \frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c\end{aligned}$$

問題　適当な置換をすることにより、次の不定積分を求めよ

(1) $\int \tan x dx$　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　(3) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

(4) $\int x(x^2+1)^3 dx$　(5) $\int x^2 e^{x^3} dx$　(6) $\int x\sin x^2 dx$

(7) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$　(8) $\int x\sqrt{x^2+2}dx$　(9) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$

5.6.2 置換積分（定積分）

$\int_a^b f(x)dx$ の定積分を，$x = \phi(t)$ と置換して計算する場合，積分区間 $[a, b]$ を $a = \phi(\alpha)$，$b = \phi(\beta)$ となる α, β を用いて変更し，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt \tag{111}$$

とすることができる。

例えば，$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$ を計算する場合，$1 - x = t$ とおけば，$dx = -dt$ である。また，積分区間 $x = 0$ のとき $t = 1$，$x = 1$ のとき $t = 0$ であるので，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx &= \int_1^0 (1-t)\sqrt{t}dt \\
&= \int_1^0 (t^{1/2} - t^{3/2})dt \\
&= \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_1^0 \\
&= -\frac{4}{15}
\end{aligned}$$

となる。

最後に §5.2 の表にある次の不定積分を求めてみる。

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}dx$$

$x = \sqrt{a}\tan t$ と置く。すると

$$\begin{aligned}
a + x^2 = a + a\tan^2 t &= \frac{a}{\cos^2 t} \\
dx &= \sqrt{a}\frac{1}{\cos^2 t}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx &= \int \frac{\cos t}{\sqrt{a}}\sqrt{a}\frac{1}{\cos^2 t}dt \\
&= \int \frac{1}{\cos t}dt \\
&= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}dt \\
&= \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t}dt
\end{aligned}$$

ここで更に $u = \sin t$ と置けば $du = \cos t dt$ なので

$$I = \int \frac{du}{1 - u^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}*\frac{1+\sin t}{1+\sin t}\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}\right|+C \\
&= \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C
\end{aligned}
$$

ところで、$a+x^2=\frac{a}{\cos^2 t}$ **より、**$\frac{1}{\cos t}=\frac{\sqrt{a+x^2}}{\sqrt{a}}$、$\tan t=\frac{x}{\sqrt{a}}$ **なので**

$$
\begin{aligned}
\ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+C &= \ln\left|\frac{\sqrt{a+x^2}}{\sqrt{a}}+\frac{x}{\sqrt{a}}\right|+C \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt{a}}\left|\sqrt{a+x^2}+x\right|+C
\end{aligned}
$$

$\ln\frac{1}{\sqrt{a}}+C$ **を改めて** C **と書くと**

$$
I=\ln\left|\sqrt{a+x^2}+x\right|+C
$$

5.6.3 部分積分法

次の公式は覚えておくと便利である。

$$
\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+C \tag{112}
$$

証明

$$
\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \tag{113}
$$

$$
f'(x)g(x) = \{f(x)g(x)\}'-f(x)g'(x) \tag{114}
$$

(114) **の両辺を積分すれば**

$$
\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx+C \tag{115}
$$

証明終わり

問題　部分積分を使って次の関数を積分せよ

(1) xe^x　(2) $e^{ax}\sin bx$　(3) $e^{ax}\cos bx$　(4) $x\cos x$

(5) $x\ln x$　(6) $x^2\tan^{-1}x$　(7) $(x+2)^2e^x$　(8) $\ln|x|$

難問　次の等式（漸化式）を証明せよ

$$\int \sin^n x dx = \frac{-1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}xdx \qquad (n \geq 2)$$

$$I(m,n) = \int \sin^m x\cos^n xdx \quad \text{のとき}$$

$$I(m,n) = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I(m,n-2) \qquad (m+n \neq 0)$$

$$I(m,n) = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}I(m-2,n) \qquad (m+n \neq 0)$$

6 テイラー展開

6.1 関数の近似

位置 $y = a$ にある物体が初速度 v で落下するとき，t 秒後の位置を予測する場合を考える。

最も荒っぽい近似は，t 秒後も同じ位置にいるというものである。これを式で表すと

$$y = a \tag{116}$$

さすがにそれでは荒すぎるので，時間 t に比例するものと考えて，その項を付け加えると，

$$y = a + a_1 t \tag{117}$$

となる。今の場合，係数 a_1 は初速度 v である。

この近似だと，t が小さい間は比較的良い近似になったが，t の増加とともに差が大きくなっていく。従って，t よりも変化の割合が大きい項，つまり t^2 に比例した項が必要である。

$$y = a + a_1 t + a_2 t^2 \tag{118}$$

空気抵抗などを無視すれば，$a_2 = \frac{1}{2}g$ であり，これで正確に位置を予測することが出来る。

しかし，空気抵抗などが存在すると，時間とともに差が大きくなっていく。さらに予測の精度を上げるには，t^2 よりも変化の割合の大きい t^3 の項を，さらに良くするには t^4 の項を，といったように，より高次の項まで考えることで落下位置をより正確に予測することが可能になるだろう。

つまり，落下位置の時間変化がある関数 $f(t)$ で表されるとすると，

$$\begin{aligned} y &= f(t) \\ &= a + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots \end{aligned}$$

となり，関数 $f(t)$ は多項式で展開することができる。

6.2 マクローリン展開

前節で関数を多項式で展開できることが分かったが，次にその係数を求める。

$t = 0$ 付近で展開することを考えると，係数 a は，関数 $f(t)$ に $t = 0$ を代入することで求められる。

$$f(0) = a \tag{119}$$

次に a_1 を求める。両辺を微分すると

$$f'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots \tag{120}$$

となるので，a_1 は，

$$a_1 = f'(0) \tag{121}$$

と求められる。

さらに a_2 は，

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2a_2 + 2\times 3a_3 t + 3\times 4a_4 t^2 + \cdots & (122)\\ a_2 &= \frac{1}{2}f''(0) & (123)\end{aligned}$$

a_3 は，

$$\begin{aligned} f'''(t) &= 2\times 3a_3 + 2\times 3\times 4a_4 t + \cdots & (124)\\ a_3 &= \frac{1}{2\times 3}f'''(0) & (125)\\ &= \frac{1}{3!}f'''(0) & (126)\end{aligned}$$

となる。これより，a_n は，

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{127}$$

となり，関数 $f(t)$ は次のように展開できる。

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)t + \frac{1}{2!}f''(0)t^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)t^3 + \cdots & (128)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n & (129)\end{aligned}$$

しかし，どんな t に対しても上の展開が有効というわけではない。$t=0$ では明らかに収束するが，係数 a_n によっては，$|t|$ が大きくなると発散する場合がある。$|t|<r$ で収束し $|t|>r$ で発散する場合，この r を収束半径と呼ぶ。

証明は略すが，収束半径 r は

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r \tag{130}$$

で与えられ，$r=\infty$ の場合は全ての t に対して収束し，$r=0$ の場合は $t=0$ 以外では発散する。

6.3 テイラー展開

前節でみたマクローリン展開では，関数 $f(t)$ は $t=0$ で何回でも微分可能でなければならない。これだと，$t=0$ で微分できない関数には適用することが出来ない。

$t = 0$ 以外でも使える形にしたものがテイラー展開である。関数 $f(t)$ が $t = t_0$ 付近で何回も微分可能であれば，関数 $f(t)$ は $t = t_0$ 付近で

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \cdots \tag{131}$$

と展開できる。

7 指数関数と三角関数の関係

7.1 オイラーの公式

指数関数 e^x と三角関数の間には,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{132}$$

の関係があり，これはオイラーの公式と呼ばれている。ここで，i は虚数単位で $i^2 = -1$ である。

この関係は前節のマクローリン展開を用いて証明できる。指数関数 e^x と三角関数 $\sin x$,　$\cos x$ のマクローリン展開は,

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 \cdots && (133)\\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots && (134)\\ \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots && (135) \end{aligned}$$

である。ここで，e^x の x へ ix を入れて計算すると,

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 && (136)\\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - i\frac{1}{7!}x^7 \cdots && (137)\\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + i\left\{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots\right\} && (138)\\ &= \cos x + i \sin x && (139) \end{aligned}$$

となり，オイラーの公式となる。

7.2 オイラーの公式の幾何学的な意味

実数 5 と虚数 $7i$ の和は，$5 + 7i$ であり，実数は実数のまま，虚数は虚数のままである（イメージとして，実数と虚数は混じり合わない）。このような性質は，２次元ベクトルの各成分（ x 成分，y 成分 ）の関係によく似ている。例えば，x 軸上の長さ 5 のベクトルと，y 軸上の長さ 7 のベクトルの和は，$\vec{r} = (5, 7)$ である。

ここで，x 軸を実数の数直線，y 軸を虚数の数直線とすると，複素数を２次元平面上に表すことが出来る。この平面（複素平面）上で $\cos\theta + i\sin\theta$ を表すと（ x 軸と混乱するといけないので，θ とした），原点とその点を結んだ直線は，長さが 1 で横軸（実数軸）から測った角度が θ の直線になる。もし，$e^{i\omega t}$ と時間の関数であれば，$e^{i\omega t}$ は複素平面上では角速度 ω で反時計回りに回転する長さ 1 のベクトルである。

7.3 $e^{i\theta}$ の性質

これまでの話から,

$$e^{i(0+2n\pi)}=1,\quad e^{i(\pi/2+2n\pi)}=i,\quad e^{i(\pi+2n\pi)}=-1,\quad e^{i(3\pi/2+2n\pi)}=-i$$

であることがわかる。

指数関数の性質から，$e^{\alpha}e^{\beta}=e^{\alpha+\beta}$ であり，当然上の場合も成り立つ。例えば,

$$\begin{aligned} i\cdot i &= e^{i\pi/2}e^{i\pi/2} \\ &= e^{i\pi}=-1 \end{aligned}$$

となり，複素数の性質と矛盾しない。

また，$\sqrt{e^{\alpha}}=(e^{\alpha})^{1/2}=e^{\alpha/2}$ であるから，$\sqrt{i}$ は

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2} \\ &= e^{i\pi/4} \\ &= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

と計算することが出来る。

7.4 加法定理

これまで呪文のように暗記していた加法定理も，オイラーの公式を使えば簡単に導くことが出来る。

$$e^{\alpha+\beta} = \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) \tag{140}$$

$$e^{\alpha}e^{\beta} = (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) \tag{141}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{142}$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta) \tag{143}$$

実数部と虚数部をそれぞれ比較すると,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{144}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta \tag{145}$$

となり，加法定理が導かれる（マイナスの場合も同様に求められる)。

7.5 指数関数を用いた運動方程式の解法

単振動の運動方程式は,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{146}$$

であった。この方程式を満たす関数 $x(t)$ は，2 階微分しても元の関数と同じ形である。指数関数は何回微分しても同じ形なので，この運動方程式の解と考えられる。

そこで，上の運動方程式に $x = e^{\lambda t}$ を代入して計算してみる。

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t} \tag{147}$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \tag{148}$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega \tag{149}$$

となるので，求める関数は，係数 A, B を用いて，

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{150}$$

となる。

これは，オイラーの公式を用いて，

$$x(t) = A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t) \tag{151}$$

となる。係数 A, B は複素数なので，$A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$ とおけば，

$$x(t) = (A_1 + B_1)\cos\omega t + (-A_2 + B_2)\sin\omega t + i\{(A_2 + B_2)\cos\omega t + (A_1 - B_1)\sin\omega t\} \tag{152}$$

$$\equiv C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + i(D_1\cos\omega t + D_2\sin\omega t) \tag{153}$$

となる。物理的に意味のある解は実数部分なので，確かに単振動となることがわかる。

8 微分方程式の解法

8.1 微分方程式の意味

独立変数 x とその関数 $y(x)$、及びその導関数についての等式を常微分方程式という。

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \tag{154}$$

○ 微分方程式の階数

8.2 1 階常微分方程式の解法

8.2.1 直接積分形

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{155}$$

○ 一般解と特殊解（特解）

8.2.2 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{156}$$

8.2.3 同次形

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{157}$$

○$\frac{y}{x} = z$ と置く。

8.2.4 線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x) \tag{158}$$

$\circ g(x) = 0$ **のとき、同次線形微分方程式という。** $\Rightarrow$ **変数分離形**

$\circ g(x) \neq 0$ **のとき** $\Rightarrow$ **定数変化法**

$\circ$[**非同次線形微分方程式の一般解**]$=$ [**同次方程式の一般解**]$+$ [**非同次方程式の特解**]

8.3 2 階常微分方程式の解法

8.3.1 線形微分方程式

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{159}$$

$\circ g(x) = 0$ **のとき、同次線形微分方程式という。**
独立な解は2つ。 $\Rightarrow$ $y = e^{\lambda x}$ **とおく。**

$\circ g(x) \neq 0$ **のとき** $\Rightarrow$ **定数変化法**

$\circ$[**非同次線形微分方程式の一般解**]$=$ [**同次方程式の一般解**]$+$ [**非同次方程式の特解**]

9 運動方程式

9.1 目的

物体に働く力 $\mathbf{F}$ + 初期条件 $\Rightarrow$ **物体の位置 $\mathbf{r}(t)$**

9.2 解法

物体に働く力

$\Downarrow$

力を成分に分ける（座標系）

$\Downarrow$

運動方程式

$\Downarrow$

微分方程式を解く（等加速度運動の場合は直接積分）

$\Downarrow$

初期条件から未定定数の値を決める

$\Downarrow$

物体の位置 $\mathbf{r}(t)$