連立一次方程式 1

— Jacobi 法 , Gauss-Seidel の反復法—

垣内　孝弘

98.11.24

1　Introduction

　連立一次方程式の解法には、直接法と反復法がある。
直接法の代表的な手法として、Gauss-Jordan の消去法は効率的であり、正確である（枢軸 (pivot) 選択を行うため、丸め誤差の影響が少ない)。
反復法の代表が Jacobi 法と Gauss-Seidel 法で、ある初期値を設定し、真の解 $x_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ にじわじわと近づけていく方法である。
この方法は、行列の対角成分（a_{ii}）が、非対角成分（a_{ij}）より大きいとき、有効である。
　連立方程式を行列で表し、これまでに学んだ行列演算を駆使して解を求める。ここでの説明は、
３元一次連立方程式で行う。ｎ元一次連立方程式については、ここで述べられたことを直接拡張すればよい。
　連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1}$$

を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる。
　あらゆる連立方程式の解法は、この行列 $\{a_{ij}\}$ をいかに処理するかにかかっている。一番有効な手段は、行列 $\{a_{ij}\}$ の逆行列を計算する方法である。また、次のような三角行列へ変形する方法もある。

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

　これは x_3 が解けているので、後は芋づる式に解を求めることができる。
これらの手法は行列 $\{a_{ij}\}$ を、あれこれいじくり回す必要がある。そこで、手初めに逆行列を求めることなく、解を求める方法を考えよう。それは連立方程式を解くためのアルゴリズムの中で、比較的簡単な方法である。

2　Jacobi 法

式（1）が、0 でない対角要素 $a_{ii} \quad (i=1,2,3)$ を持つとすると、次のように書き直すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{11}x_1 - a_{13}x_3) \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \end{array} \right. \tag{4}$$

この式を行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる。

初期値を (x_1^0, x_2^0, x_3^0) とする。式（5）の右辺にこの値を代入し、行列の積を計算する。その値（左辺）を (x_1^1, x_2^1, x_3^1) とすると、

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

得られた (x_1^1, x_2^1, x_3^1) を再び式（5）に代入する。この操作を繰り返し、逐次近似解を計算すればよい。
一般的には、次の漸化式で表される。

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

上式または式 (6) の第１項目の３行３列の行列と第２項は、要素がすべて定数である事に注意しよう。第１項の演算は演習２、問題 2-2-1 を簡単にしたものであり、結果は１次元配列に収納される。それと第２項 (これも１次元配列) の和を行えばよい。この２つの演算の繰り返しだけで、適当な初期値が真の解へ収束して行く。

収束条件はすべての i について $|\ x_i^{k+1} - x_i^k\ | \quad < \quad \mathrm{eps}$ が成り立てば、繰り返しをやめる。

例

次の連立方程式を解いてみよう。

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \end{array} \right. \tag{8}$$

対角成分が非対角成分より大きくなるように方程式が並べられていることに注意しよう。対角成分が 0 でないので、式 (4) のように書き直す。

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = \frac{1}{4}(16 - x_2 - 2x_3) \\ x_2 = \frac{1}{3}(10 - x_1 - x_3) \\ x_3 = \frac{1}{5}(12 - x_1 - 2x_2) \end{array} \right. \tag{9}$$

式 (7) のように表すと

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix} \tag{10}$$

初期値 $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0,0,0)$ から始め、最初の数回の反復計算を示す。
$k=0$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix}$$

$k=1$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59/30 \\ 18/15 \\ 4/15 \end{pmatrix}$$

$k=2$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59/30 \\ 18/15 \\ 4/15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107/30 \\ 233/90 \\ 229/150 \end{pmatrix}$$

$k=3$

$$\begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/5 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 107/30 \\ 233/90 \\ 229/150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10/3 \\ 12/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4661/1800 \\ 736/450 \\ 313/450 \end{pmatrix}$$

この様にして反復操作を続ければ、近似解 $(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, x_3^{k+1})$ は、正確な解 $(3,2,1)$ に収束する。

3 Gauss-Seidel 法

Gauss-Seidel 法は Jacobi 法を少し改良した方法である。
x_i が計算されたら、x_{i+1} の計算に新しい x_i を使う。ここでは、行列演算を忘れた方が良いかもしれない。式 (4) をもう一度眺めてみる。式 (4) 式の一番上の式で ($k=0$ とする)、x_1 を求める。この時 x_2 と x_3 は初期値を使う。その次の式で x_2 を計算する訳だが、式中の x_1 は、今計算した x_1 を使い、x_3 は初期値を使う。最後の式で計算する x_3 は、x_1、x_2 共に新しい数値を使う。これで 1 回の反復が終わる。

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0) \\ x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{11}x_1^1 - a_{13}x_3^0) \\ x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{11}x_1^1 - a_{12}x_2^1) \end{cases} \tag{11}$$

一般の漸化式で表すと、

$$x_i^{k+1} = b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n=3} \alpha_{ij} x_j^k \tag{12}$$

ここで $\alpha_{ij} = a_{ij}/a_{ii}$ である。
また、収束条件は Jacobi 法と同じである。Gauss-Seidel 法の収束の速さは、Jacobi 法の 2 倍であることが示されている。
Gauss-Seidel 法が収束する十分条件は $max_i(\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|) \quad < \quad 1$ である。これは十分条件であって、必要条件ではない。従って、この条件を満たしていなくても収束する可能性はある。また、収束の速さから、Jacobi 法より Gauss-Seidel 法が好まれる。